UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Juegos con información incompleta

Autor: Yunwei Cao

Director:	**Dr. Josep Vives**
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica**
Barcelona,	**27 de junio de 2018**

Abstract

This work presents the transformation of Harsanyi, that help us to transform a game with incomplete information into a game with information complete but imperfect, and the basic results related to games with incomplete information. After a long introduction with examples, this report studies Bayesian games in depth and presents the notion of equilibrium in these cases.

Resumen

Este trabajo presenta la transformación de Harsanyi, que ayuda a transformar un juego con información incompleta en un juego con información completa pero imperfecta, y los resultados básicos relativos a juegos con información incompleta. Después de una larga introducción con ejemplos, este trabajo estudia los juegos Bayesianos en profundidad y presenta la noción de equilibrio en estos casos.

Agradecimientos

En primer lugar, quería agradecer muy sinceramente a mi tutor, Dr.Josep Vives, por elegir el tema, por explicar conceptos, por corrección ortográfica y por su paciencia.

También me gustaría expresar mi agradecimiento a todos los profesores de la Facultad por sus enseñanzas profesionales y paciencia.

Al final quería agradecer a mi familia y amigos por sus apoyos y confianzas.

Índice

1. Introducción

Vivimos en un mundo globalizado en el que diariamente se producen un gran número de acuerdos y transacciones económicas, no solo entre países, sino también entre empresas y particulares. La teoría de juegos es una área matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos, los llamados “juegos”. La teoría de juegos se ha convertido en una herramienta extremadamente importante para la teoría económica.

El estudio de la teoría de juegos comenzó con Zermelo (1913), Borel (1921) y von Neumann (von Neumann (1928), más tarde von Neumann y Morgenstern (1944, 1947) por primera vez la formalizaron sistemáticamente (véase Myerson, 1991). Posteriormente John Forbes Nash Jr. (1950, 1951) uso el teorema del punto fijo para demostrar la existencia de puntos de equilibrio y sento una base sólida para la generalización de la teoría de juegos. Además, las investigaciones de Selton y Harsanyi también jugaron un papel en el desarrollo de la teoría. Hoy en día la teoría de juegos se ha convertido en una disciplina muy completa.

¿Que es la teoría de juegos? Un juego se puede definir como “todo problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre los otros”. La teoría de juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación que denominamos juegos, en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados esperados, bien mediante decisiones individuales (caso de los juegos no cooperativos), o bien mediante acuerdos entre participantes (caso de los juegos cooperativos).

Podemos distinguir cuatro tipos de juegos: juegos estáticos con información completa; juegos dinámicos con información completa; juegos estáticos con información incompleta; juegos dinámicos con información incompleta. A estas cuatro clases de juegos le corresponden cuatro nociones de equilibrio: equilibrio de Nash, equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, equilibrio Bayesiano de Nash y equilibrio Bayesiano perfecto.

En la teoría de juegos con información completa, todos los jugadores conocen toda la información, es decir, conocen el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias, y las preferencias de los jugadores. Y todos los jugadores saben que todos los otros conocen esta información, y así sucesivamente. Es decir, tienen la información completa. Pero en la realidad, algunos jugadores pueden tener informaciones privadas, y otros disponen de menos información sobre la estructura del juego. En esta situación decimos que el juego es de información incompleta.

En este trabajo vamos a analizar juegos estáticos con información incompleta, que son aquellos en los que los jugadores toman sus decisiones simultáneamente y, aunque las características y estructura del juego son de dominio público, existen algunas información referidas a los pagos del juego (o con consecuencia en las pagos del juego) que son privadas, es decir están al alcance de unos jugadores pero no de otros.

En las secciones siguientes se aborda, tras una primera sección introductoria en la que se da cabida a las jugadas de azar, el estudio de los juegos Bayesianos y de los equilibrios Bayesianos. Seguidamente se presentan dos secciones de aplicaciones, la primera referida a subastas y la segunda referida al diseño de mecanismos.

En la aplicación sobre subastas, estudiamos la mejor estrategia de los postores en subastas selladas en diferentes situaciones y los beneficios del vendedor en diferentes subastas.

En la última sección, presentamos brevemente el diseño de mecanismos. Y obtenemos una mejor estrategia para el director y los participantes.

2. La teoría de Harsanyi

Para estudiar los juegos con información incompleta, necesitamos buscar un modelo matemático. Para modelizar situaciones con información incompleta se usa la teoria de Harsanyi (1967). Esta teoría es una técnica para completar una estructura en la que la información está incompleta.

2.1. Un modelo básico de conocimiento

Para entender este tema, necesitamos aclarar algunos conceptos básicos.

Definición 2.1. *Un juego estratégico de n-jugadores es una terna* $G := (N, A, u)$ *cuyos elementos son los siguientes:*

Conjunto de jugadores: *N.*

Conjuntos de estrategias: *para cada* $i \in N$, A_i *es el conjunto de estrategias del jugador i, que suponemos no-vacío y* $A := \prod_{i=1}^{n} A_i$ *es el conjunto del perfiles estratégicos.*

Función de pagos: *para cada* $i \in N, u_i : A \to \mathbb{R}$ *es la función de pagos del jugador i, y* $u := \prod_{i=1}^{n} u_i; u_i$ *asigna a cada perfil estratégico* $a \in A$*, el pago que recibe el jugador i si se ha jugado a .*

Definición 2.2. *Dado* $G = (N, A, u)$ *un juego estratégico y un perfil estratégico* $a \in A$*, donde* $(a_{-i}, \hat{a}_i)$ *denota el perfil* $(a_1, ..., a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, ..., a_n)$*. Un* ***equilibrio de Nash*** *de G es un perfil estratégico* $a^* \in A$ *tal que, para cada* $i \in N$ *y cada* $\hat{a}_i \in A_i$*,*

$$u_i(a^*) \geqslant u_i(a^*_{-i}, \hat{a}_i)$$

Definición 2.3. *Un* ***modelo de información*** *para un conjunto de jugadores N=*$\{1,....,n\}$ *es I=(* $\Omega, \{\rho_i\}_{i\in N}, \{\mathcal{P}_i\}_{i\in N}$ *)*

1) Ω *es un conjunto finito, con elemento genérico* ω*.*

2) Para cada jugador $i \in N$ *, una probabilidad* ρ_i *en* Ω*.*

3) $\mathcal{P}_i$ *es una partición de* Ω*, para cada jugador* $i \in N$*.*

El conjunto Ω representa el conjunto de todos los posibles estados del mundo. La probabilidad ρ_i representa la creencia a priori sobre el estado del mundo que se va a realizar. Finalmente $\mathcal{P}_i$ denota la información de partición del jugador i. Dado $P \in \mathcal{P}_i$, si el verdadero estado del mundo es $\omega \in$ P, el jugador i sólo sabe que el verdadero estado del mundo es algún átomo de P , pero no sabe cual es; es decir, los diferentes estados del mundo incluidos en P son indistinguibles para el jugador i. Sea $P_i(\omega)$ el conjunto de estados que i no puede descartar cuando ω es el verdadero estado del mundo. Notamos que, $\forall \omega \in \Omega, \omega \in P_i(\omega)$. Finalmente, cada $E \subset \Omega$ es un *evento* de Ω

Definición 2.4. *Un modelo de información tiene un* ***única conjetura a priori*** *si para todo par de jugadores i,j* $\in$ *N,* ρ_i=ρ_j.

Para simplificar la notación, el modelo de información con una conjetura se denota por $(\Omega, \rho, \{\mathcal{P}_i\}_{i\in N})$ en lugar de $(\Omega, \{\rho_i\}_{i\in N}, \{\mathcal{P}_i\}_{i\in N})$.

Dado el subconjunto $E \subset \Omega$ y $\omega \in \Omega$, decimos que i conoce E en ω si $P_i(\omega) \subset E$; es decir,cuando ω es un verdadero estado del mundo i sabe que algún átomo de E pasó. Además, definimos $K_iE := \{\omega \in \Omega : P_i(\omega) \subset E\}$ que denota los estados del mundo en el cual i conoce E , $K_*E := \cap_{i\in N} K_iE$ denota los estados del mundo en el que todos los jugadores conocen E. Como $K_iE \subset \Omega$, K_iE es en sí mismo un evento. De manera que, K_jK_iE está bien definido y denota los estados del mundo en el cual j sabe que i sabe E. Al final podemos introducir una nueva definición importante: *el conocimiento común.*

Definición 2.5. *Un evento* $E \subset \Omega$ *es un* ***conocimiento común*** *en* $\omega \in \Omega$ *si* $\omega \in CKE$, *con* CKE:= $K_*E \cap K_*K_*E \cap K_*K_*K_*E \cap ...$ *Es decir,un evento es conocimiento común si todos los jugadores lo saben, todos los jugadores saben que los otros jugadores lo saben, y sucesivamente hasta infinito.*

Tenemos que tener en cuenta que el conocimiento común es mucho más de lo que decimos cuando algo es conocido por todos los jugadores.

2.2. Representación de la transformación de Harsanyi

Hasta aquí hemos dejado claro algunos conceptos básicos. Vamos a presentar la transformación de Harsanyi

Como siempre, denotaremos el conjunto de jugadores del juego con N={1,...,n}, mientras el conjunto finito Ω representa los todos estados del mundo .

En primer lugar, Harsanyi notó que cuando se estudian juegos con información incompleta, se puede suponer que la única incertidumbre viene de las funciones de pagos del juego.

Supongamos que hay una información incompleta sobre las acciones (estrategias) de los jugadores. En este caso, podemos tomar una representación alternativa del juego, para cada jugador hay un"conjunto universal de acciones"que incluye todas sus acciones potenciales, estos conjuntos son conocidos por todos los jugadores. Supongamos que en el juego original hay un elemento $\omega \in \Omega$ en el cual la acción **a** del jugador j no esta presente. Como que el jugador j sabe cual es su conjunto de estrategias en cada estado, él puede distinguir aquellos estados en los que a está presente de aquellos en donde **a** no está presente. Por lo tanto, es suficiente definir los pagos en el juego nuevo, de manera que la acción **a** es dominante estrictamente en los estados en los cuales **a** no está presente en el juego original.

Por otra parte, supongamos que hay una incertidumbre sobre el conjunto de jugadores. El proceso es parecido al caso anterior. Tomando un juego con un "conjunto de jugadores universales" y añadir una estrategia a cada jugador diciendo "estoy jugando" o "no estoy jugando". Es suficiente definir los pagos de forma que los jugadores tengan los incentivos apropiados en los diferentes estados del mundo . En el caso " no estoy jugando", la acción es estrictamente dominante en aquellos estados en los cuales no estaban presentes en el juego original.

Finalmente, las incertidumbres sobre la función de resultados o sobre las preferencias de los jugadores pueden modelarse conjuntamente a base de definir las utilidades de los jugadores directamente en el espacio de las estrategias.

En consecuencia, toda la información incompleta puede reducirse a un desconocimiento de las funciones de pagos.

El elemento más importante de la transformación de Harsanyi es lo que llamamos **espacio de tipos** Θ. Se fija el *tipo* $\theta \in \Theta$ de los jugadores antes de que empiece el juego. Cada jugador tiene un **tipo** θ, que contiene toda la información relevante en posesión del jugador, sea esta, información sobre ciertos valores, creencias o probabilidades subjetivas respecto a valores desconocidas. Antes de iniciar el juego, tiene lugar un movimiento de la naturaleza que determina el tipo de cada jugador. Cada jugador es informado de su tipo, pero no del tipo de los demás. De esta forma, el juego se transforma en un juego extensivo de información imperfecta pero completa.

Las etapas del juego son:

Movimiento de naturaleza: Un estado del mundo $\omega \in \Omega$ y un perfil de tipo $\theta \in \Theta$ se realizan.

Jugadores reciben informaciones: cada jugador recibe información sobre ω. Esta información podría variar de jugador a jugador. Para modelizar esta diferente información, complementamos Ω con un modelo de información con una distribución a priori común llamado $I = (\omega, \rho, \{\mathcal{P}_i\}_{i \in N})$, es decir, para cada $\omega \in \Omega$, todo jugador **i** sabe que él está en algún estado de $P_i(\omega) \in \mathcal{P}_i$. Desde el punto de vista del juego extensivo, cada conjunto de $\mathcal{P}_i$ se corresponde con un conjunto de información del jugador **i**.

Movimientos de jugadores: cada jugador elige una acción condicionada por su propio tipo.

Pagos realizados: los jugadores reciben los pagos correspondientes con sus tipos y las acciones elegidas en el estado realizado del mundo.

3. Juegos Bayesianos

Con la construcción anterior, obtenemos un tipo de juego extensivo especial. Son juegos simples de dos etapas donde las opciones disponibles para los jugadores son las mismas, independientemente de sus tipos, y debido a esto, a menudo se modelan a través de un Juego Bayesiano. El nombre proviene del hecho de que se supone que los jugadores usan la actualización Bayesiana para actualizar sus creencias anterior cuando aprenden sus tipos.

3.1. Juegos Bayesianos y Equilibrio de Nash Bayesiano

En un juego de información completa, la representación en forma normal exige concretar el número n de jugadores, las acciones A_i disponibles y los pagos $u_i(a_1, ..., a_i, ..., a_n)$ para cada jugador i, y además, la estructura temporal del juego supone que los jugadores toman simultáneamente sus decisiones y a continuación reciben los pagos. En un juego bayesiano hay que añadir varios elementos y ampliar la descripción, tal como hace la siguiente definición.

Definición 3.1. *Un* ***juego Bayesiano*** *con conjunto de jugadores N es un 5-tupla BG=*$(\Omega, \Theta, \rho, A, u)$*, donde*

Los estados del mundo: Ω *es el conjunto finito de los estados de la naturaleza. Por ejemplo, en un juego de cartas, puede ser cualquier orden de las cartas.*

Los tipos de los jugadores: *los elementos del conjunto finito definido por* $\Theta := \prod_{i \in N} \Theta_i$.

Conjeturas: $\rho \in \Delta(\Theta \times \Omega)$. *La distribución de probabilidades sobre las combinaciones de tipos, (un conjunto de creencias sobre los tipos de los rivales).*

Las acciones/estrategias posibles: *Los elementos del conjunto finito definido por A:=* $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Una ***estrategia pura*** *del jugador i es una aplicación* $\hat{a}_i : \Theta_i \to A_i$.

Si $\hat{A}_i$ *es el conjunto de estrategias puras del jugador i y* $\hat{A} := \prod_{i=1}^{n} \hat{A}_i$*,(Dado una acción* $\hat{a} \in \hat{A}$ *y un perfil de tipo* $\theta \in \Theta$*, usamos* $\hat{a}(\theta)$ *para notar* $(\hat{a}_1(\theta_1), ..., \hat{a}_n(\theta_n))$*, cada jugador tiene que elegir, para cada posible tipo, que acción tomar.*

Las funciones de pagos: $u := \prod_{i=1}^{n} u_i$*, para cada* $i \in N$*,* $u_i : \Omega \times \Theta_i \times A \to \mathbb{R}$*. Ahora, para cada* $i \in N$*,* ***función (Bayesiana) de pagos*** *del jugador i definido como:* $\hat{u}_i : \hat{A} \to \mathbb{R}$*,* $\forall \hat{a} \in \hat{A}$*,* $\hat{u}_i := \sum_{(\theta,\omega)\in\Theta\times\Omega} \rho_i(\omega|_{\omega_i}) u_i(\omega, \theta_i, \hat{a}(\theta))$.

(En el caso de infinitos estados del mundo o infinitos conjuntos de tipos, las sumas se cambian por integrales.)

Todos los elementos del juego Bayesiano son conocimientos comunes. En este caso ya no se tiene información incompleta. Tenemos información imperfecta (los diferentes tipos de los jugadores desempeñan los papeles de los diferentes conjuntos de información.) Recordemos que un juego es de información incompleta si los jugadores no saben alguna información sobre los otros jugadores y es de información imperfecta si los jugadores simplemente desconocen las acciones elegidas por otros jugadores. Sin embargo, saben quiénes son los otros jugadores, cuáles son sus posibles estrategias (acciones) y las preferencias (ganancias) de estos otros jugadores.

Ejemplo 3.2. Consideramos dos empresas. E1 es una empresa monopolista de un determinado producto en un país en particular. E2 esta considerando la posibilidad de entrar el mercado. E2 sabe que, en el mismo tiempo, E1 podría quizás prepararse para una eventual competencia duopolística haciendo una inversión para mejorar sus canales de distribución. Sin embargo, E2 no sabe si la inversión necesaria para esta mejora es grande o pequeña. E2 cree que la probabilidad de E1 haga una gran mejora es $p \in (0{,}1)$. Esta creencia se basa en hechos objetivos que son públicamente conocidos (p esta conocido por E1). Los beneficios de las dos empresas se representan en la figura siguiente : I y NI representan "invertir" y "no invertir", respectivamente; E y NE representan "entrar" y "no entrar", respectivamente; y L y S representan "grande" y "pequeña", respectivamente.

Este juego con jugada de azar previa es de naturaleza distinta a todos los que hemos analizado hasta ahora. Su naturaleza es estática en cuanto a que las acciones de los jugadores pueden considerarse simultáneas. Pero la jugada inicial del azar, cuyo resultado unos observan y otros no, le da al juego un carácter especial y nuevo.

Este es un juego con información incompleta, ya que el jugador 2 no sabe la función de beneficio de jugador 1. Supongamos que los beneficios para los jugadores están dados por las funciones de utilidad esperada de von Neumann y Morgensten. E1 va a elegir NI si la inversión necesaria es grande, y va a elegir I si la necesaria es pequeña, independientemente de si E2 entra en el mercado o no. Por lo tanto, E2 obtendrá $p - (1 - p) = 2p - 1$ cuando elige E, y obtendrá 0 cuando elige NE. Por lo tanto, E2 elegirá E si $p > 1/2$, NE cuando $p < 1/2$, indiferente si $p = 1/2$.

A continuación, describimos un juego Bayesiano BG $= (\Omega, \Theta, \rho, A, u)$ que se corresponde con el juego con información incompleta definido previamente.

Los estados del mundo: $\Omega = \{L, S\}$

Los tipos de jugadores: Los tipos de los jugadores son $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ y $\Theta_2 = \{\theta_2\}$. Es conocimiento común que el jugador 1 sabe el estado del mundo que se ha realizado y el jugador 2 lo ignora. $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$. Como que estos espacios tienen un único elemento, las creencias están solo en Ω.

Conjetura: $\rho(L) = p$ y $\rho(S) = 1 - p$. Las creencias actualizadas son $\rho_1(L|_L) = \rho_1(S|_S) = 1$, $\rho_1(S|_L) = \rho_1(L|_S) = 0$, $\rho_2(L|_L) = \rho_2(L|_S) = p$, $\rho_2(S|_l) = \rho_2(S|_S) = 1 - p$.

Los posibles acciones : $A_1 = \{I, NI\}$ y $A_2 = \{E, NE\}$

Las funciones de beneficio:

	E	NE
I	0 , -1	2 , 0
NI	2 , 1	3 , 0

L

	E	NE
I	3 , -1	5 , 0
NI	2 , 1	3 , 0

S

En este ejemplo, el conjunto Ω podría ser eliminado fácilmente introduciendo el segundo tipo para el jugador 1. El primero de los dos tipos sería el que tiene beneficio asociado a un gran coste de inversión y el segundo tipo tendría los beneficios correspondiente con una pequeña inversión. La Figura siguiente representa como el juego extensivo de juego Bayesiano, Γ^{BG} (En este ejemplo, el jugador 1 mueve primero, pero también podria ser al revés).

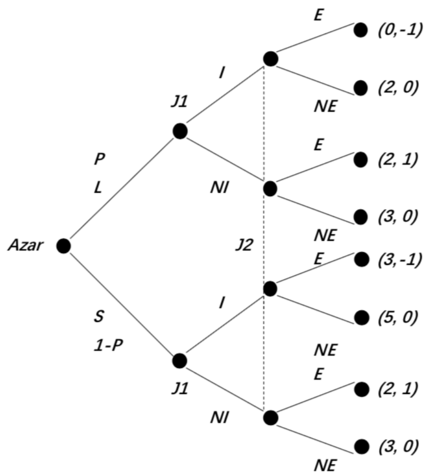


Figura 1: El juego extensivo con información imperfecta de Ejemplo 3.2

Ejemplo 3.3. Consideramos la siguiente modificación del ejemplo anterior.

E1 es una monopolista, E2 tiene que decidir si entrar en el mercado o no, y E1 puede hacer una inversión para mejorar sus canales de distribución. La diferencia es que ninguna empresa tiene que estar necesariamente informada sobre el coste de la inversión. Ambas firmas han llevado a cabo estudios independientes para conocer el coste real de la inversión, con probabilidad $p1(p2)$ y E1(E2) sabe si el coste es "grande" o "pequeño". El juego podría describirse como sigue. Hay una primera etapa donde la naturaleza se mueve y selecciona L o S con probabilidades p y $1-p$, respectivamente. Después, la naturaleza se mueve otra vez y con probabilidad $p1(p2)$, E1(E2) está informada sobre el coste de la inversión (estas probabilidades son independientes). Ninguna de las empresas conoce la información recibida por la otra. Finalmente, las empresas escogen sus acciones.

Describimos un juego Bayesiano BG=$(\Omega, \Theta, \rho, A, u)$:

Los estados del mundo: $\Omega = \{L, S\}$

Los tipos del jugadores: $\Theta_1 = \{I, U\}$ y $\Theta_2 = \{I, U\}$, donde I y U indican si los jugadores están informados o no sobre el coste de la inversión. Una representación de este juego sin Ω={L,S} nos requeriría enriquecer el espacio tipo del jugador 1 a $\{(I, L), (I, S), (U, L), (U, S)\}$.

El concepto del juego Bayesiano que estamos analizando constituye una extensión de concepto de juego estático simple, y al mismo tiempo, en virtud de su modelización mediante la introducción de una jugada de azar inicial, constituye un caso particular del concepto de juego dinámico con información imperfecta. Por lo tanto, necesitamos elaborar un concepto de equilibrio apropiado para este nuevo contexto Bayesiano coherente con el concepto de equilibrio de Nash. Se define un nuevo concepto, que llamaremos equilibrio Bayesiano (EB).

Definición 3.4. *Dado $BG = (\Omega, \Theta, \rho, A, u)$ un juego Bayesiano. Un **Equilibrio Bayesiano de Nash** de estrategias puras es un perfil estratégico $\hat{a}^* \in \hat{A}$ tal que, para cada $i \in N$ y cada $\hat{a}_i \in \hat{A}_i$,*

$$\hat{u}_i(\hat{a}^*) \geqslant \hat{u}_i(\hat{a}^*_{-i}, \hat{a}_i)$$

Es decir, cada jugador i maximiza su pago esperado.

Vamos a calcular los EB del **Ejemplo 3.2**. Lo haremos de manera progresiva desde un punto de vista didáctico, de modo que en los primeros casos haremos una aproximación intuitiva, mientras que en los últimos haremos uso de manera literal y completa de la **Definición 3.4**

Ejemplo 3.5. Sea el juego del Ejemplo 3.2, cuya representación en forma extensiva repetimos a continuación y cuyas características (acciones, tipos, estrategias y conjeturas) se han analizado.

Estrategia de J1: a_1= {(I-I),(I-NI),(NI-I),(NI-NI)},

Estrategia de J2: a_2= {E,NE}

Sea $\hat{a}^* = (\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ un perfil de equilibrio, analizaremos las consecuencias basándonos en el **árbol** anterior.

Supongamos que la estrategia $\hat{a}_2$ de J_2 en dicho perfil es "Entrar". En ese caso la repuesta óptima de J_1, en caso de que su tipo sea "Grande", es "No Inversión" (pues el pago obtenido es 2 en lugar de 0), y en caso de que su tipo sea "Pequeña", es "Inversión" (pues el pago obtenido es 3 en lugar de 2). Por tanto, la estrategia óptima de J1 sería $\hat{a}_1 =$ (NI-I). Por otra parte la repuesta óptima de J2 a la estrategia $\hat{a}_1 =$ (NI,I) es "Entrar" si $p > \frac{1}{2}$ (pues le produce un pago esperado > 0, mientras que "No Entrar" le producía 0). Así pues, hemos identificado un EB, el perfil (NI-I,E).

Supongamos ahora que la estrategia $\hat{a}_2$ de J2 en $\hat{a}^*$ es "No Entrar". En ese caso la repuesta óptima de J1, en caso de que su tipo sea "Grande", es "NI" (pues el pago obtenido es 3 en lugar de 2), pero en caso de que su tipo sea "Pequeña", sería "Inversión" (pues el pago obtenido es 5 en lugar de 3). Por lo tanto, la estrategia óptima de J1 sería $\hat{a}_1 =$ (NI-I). Por otra parte la repuesta óptima de J2 a la estrategia $\hat{a}_1 =$ (NI-I) es “Entrar” si $p > \frac{1}{2}$. En conclusión, el único EB es (NI-I,E).

Proposición 3.6. *Sea BG un juego Bayesiano,*

I) *Si un perfil de estrategias puras en juego extensivo con información imperfecta es un equilibrio de Nash, entonces el perfil de estrategias también será un equilibrio Bayesiano de Nash.*

II) *Si un perfil estrategias puras en un BG es un equilibrio Bayesiano de Nash, entonces el perfil de estrategias es un equilibrio de Nash en un juego extensivo con información imperfecta .*

Demostración. Usamos la definición para hacer la demostración

I) Supongamos que $a^* \in \hat{A}^*$ es un perfil de estrategias y un equilibrio de Nash. Por la definición sabemos $u_i(a^*) \geq u_i(a^*_{-i}, \hat{a}_i)$ con la función de pagos u_i. Es decir, a^* es una estrategia que puede maximizar la función de pagos. Queremos demostrar que este perfil de estrategias también puede maximizar la función de pagos Bayesianos del juego Bayesiano: $\hat{u}_i := \sum_{(\theta,\omega)\in\Theta\times\Omega} \rho_i(\omega|_{\omega_i})u_i(\omega, \theta_i, \hat{a}(\theta))$. En este caso, $\rho_i(\omega|_{\omega_i})$ es una probabilidad distribución no negativa y $u_i(\omega, \theta_i, a^*(\theta)) \geq u_i(\omega, \theta_i, \hat{a}_i(\theta))$. Por tanto, decimos que a^* es un equilibrio de Nash Bayesiano.

II) Se demuestra de forma análoga al caso anterior.

$\square$

4. La primera aplicación: Subastas

En esta sección vamos a analizar las subastas. Las subastas constituyen una de las primeras aplicaciones de los juegos estáticos de información incompleta. La teoría de subastas la podemos ver cómo un puente que relaciona la teoría matemática de juegos y teorías económicas como el diseño de mecanismos, la teoría de contratos, y las economía de la información.

Hay muchas actividades de compraventa que reciben el nombre de subastas, pero, ¿qué es una subasta? Una subasta es la venta organizada de un bien o servicio en la que los compradores compiten entre ellos ofreciendo cantidades denominadas pujas. La adjudicación del bien o servicio y la cantidad que se paga por él se realiza en función de las pujas de acuerdo con una regla predeterminada.

Una clase particular de subastas es la subasta en sobre cerrado. En ellas las pujas son cantidades escritas que se entregan en un sobre cerrado, cuyo contenido sólo conoce el postor que las escribió, y se hacen públicas todas a la vez en un acto de apertura de sobres.

En esta sección, estudiaremos algunas de las subastas más importantes y sencillas basadas en diferentes hipótesis simplificadoras, que pueden ser abordadas con el modelo de juego Bayesiano introducido en la sección anterior.

Una subasta consiste en un conjunto N de jugadores que compiten para comprar un objeto. Cada jugador tiene su valoración del objeto que pertenece al intervalo $[0,\bar{v}]$, donde $\bar{v} > 0$; esta valoración determina su función de pagos. Además, suponemos que la valoración se distribuye de manera independiente e idéntica en $[0,\bar{v}]$ según una distribución de probabilidad ρ cuya densidad es diferenciable y $\rho(\omega, \theta) > 0$ por cada ω, θ. Al presentar las pujas, cada jugador conoce su valoración (tipo) y las valoraciones de los otros postores se distribuyen independientemente según ρ; es decir, las valoraciones son privadas. Todos los elementos de la subasta son conocimiento común. Siguiendo la transformación de Harsanyi, una subasta se puede modelar de la siguiente manera:

Movimiento de la naturaleza: La naturaleza hace su movimiento y los tipos que se realizan.

Jugadores reciben informaciones: Cada jugador esta informado sobre su tipo y no hay más información.

Movimiento de jugadores: Cada jugador establezca una puja.

Pagos esta realizado: El jugador se adjudica el objeto con la puja más alta. Si hay varias pujas iguales que son las más altas, se adjudica el objeto a uno de estos jugadores al azar con probabilidad igual.

- **subasta al primer precio:** EL postor que se adjudica el objeto paga su puja.
- **subasta al segundo precio:** El postor que se adjudica el objeto paga la segunda puja más alta.

Como que cada jugador no sabe la valoración de otros, una subasta es un juego con información incompleta. Una característica especial de la subasta es que, al conocer la valoración de un jugador, también conocemos su información. Por lo tanto, en cuanto se trata de subastas, el espacio de tipos y los estados del mundo tienen el mismo significado. A posteriori representaremos formalmente la subasta al primer precio como un juego Bayesiano.

4.1. Subastas en sobre cerrado al primer precio

Definición 4.1. *Una subasta al primer precio con el conjunto de jugadores N es un 4-tupla (Θ, ρ, A, u^I), donde*

Los tipos de los jugadores: $\Theta := \prod_{i\in N} \Theta_i$*, para cada* $i \in N$, $\Theta_i = [0, \bar{v}]$.

Conjeturas de los jugadores: *La distribución de probabilidad encima [0, $\bar{v}$], denota por ρ, donde los tipos son independientes.*

Los perfiles de las estrategias: $A := \prod_{i=1}^{n} A_i$*, donde* $A_i := [0, \infty)$.

Una ***estrategia pura*** *de jugador i es una función $\hat{a}_i : \Theta_i \to A_i$. $\hat{A}_i$ es el conjunto de estrategias puras de i y $\hat{A} := \prod_{i=1}^{n} \hat{A}_i$.*

Las funciones de pagos: $u^I := \prod_{i=1}^{n} u_i^I$*, para cada* $i \in N, u_i^I : [0, \bar{v}] \times A \to \mathbb{R}$ *está definido como:*

$$u_i^I(\theta_i, a) = \begin{cases} \theta_i - a_i & si \quad a_i > max_{j\neq i} a_j \\ \frac{\theta_i - a_i}{|j : a_j = max_{k\in N} a_k|} & si \quad a_i = max_{j\neq i} a_j \\ 0 & si \quad a_i < max_{j\neq i} a_j \end{cases}$$

Para cada $i \in N$, ***la función (Bayesiana) de pagos*** *de i es $\hat{u}_i^I : \hat{A} \to \mathbb{R}$ que está definida por*

$$\hat{u}_i^I(\hat{a}) := \int_{\theta\in[0,\bar{v}]^n} u_i^I(\theta_i, \hat{a}(\theta)) d\rho(\theta_1) \cdots d\rho(\theta_n).$$

Para ordenar didácticamente el análisis de los distintos casos relevantes, estudiamos en primer lugar el ejemplo más simple, con sólo dos postores, y la distribución de probabilidad más sencilla.

4.2. Dos postores y distribución uniforme

Los elementos del juego son los siguientes:

Conjunto de las acciones: $A_1 = A_2 = [0, 1]$, denotamos que a_i es la puja del postor i con $i = 1, 2$.

Conjuntos de tipos de los jugadores: $\Theta_1 = \Theta_2 = [0,1]$, denotamos que θ_i es la valoración al objeto de postor i, es decir, el tipo del jugador i.

Conjeturas de los jugadores: Ya conocemos que la valoración de cada postor sigue una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [0,1], y que las valoraciones individuales son independientes entre sí. Por lo tanto, la conjetura de cada postor, dado su tipo, se corresponde con las probabilidades a priori. Es decir, sabemos que

$$prob(\theta_i < x) = x, \quad \forall i = 1,2$$

y que

$$prob_i(\theta_j < x | \theta_i = y) = x \quad \forall i,j = 1,2, i \neq j \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Conjuntos de estrategias: Para cada postor el conjunto de estrategias $\hat{A}_i$ puede ser el conjunto de las aplicaciones $\hat{a}_i : \Theta_i \to A_i$ que podemos definir como:

$$\hat{A}_i = \{\hat{a}_i(\theta_i) | \hat{a}_i : [0,1] \to [0,1]\}, \quad \forall i = 1,2$$

Funciones de pagos (que son neutrales al riesgo): definimos como

$$u_i^I(\theta_i, \theta_j; a_i, a_j) = \begin{cases} \theta_i - a_i & si \quad a_i > a_j \\ \frac{\theta_i - a_i}{2} & si \quad a_i = a_j \\ 0 & si \quad a_i < a_j \end{cases} \quad \forall i,j = 1,2$$

Teorema 4.2. *Sea una subasta de un bien, en sobre cerrado al primer precio y con dos jugadores, en el cual las valoraciones de ambos jugadores son independientes y tienen una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [0,1]. Sea [0,1] asimismo el intervalo de pujas aceptables.*

Entonces el perfil simétrico $(\hat{a}_1(\theta_1) = \theta_1/2, \hat{a}_2(\theta_2) = \theta_2/2)$ *es un equilibrio Bayesiano del juego.*

Demostración. Supongamos que la estrategia $\hat{a}_2(\theta_2)$ de J2 en dicho perfil es $\theta_2/2$. Veamos que la respuesta óptima esperada de J1, en caso de que su tipo sea θ_1, es $\hat{a}_1(\theta_1) = \theta_1/2$. Lo será si la acción $a_1 = \theta_1/2$ es solución óptima, para cualquier valoración θ_1, al siguiente problema de maximización de ganancia esperada de J1:

$$max \ E_{\theta_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{\theta_2}{2})] \quad a_1 \in [0,1]$$

donde E_{θ_2} es el valor esperado de J1 según la variable aleatoria θ_2, de la función de ganancias $u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{\theta_2}{2})$ de J1.

Expresamos la ganancia esperada de J1 como:

$$E_{v_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \tfrac{\theta_2}{2})]$$
$$= p(J1 \ gana \ la \ subasta)(\theta_1 - a_1) + p(J1 \ y \ J2 \ empatan)(\tfrac{\theta_1 - a_1}{2}) + p(J1 \ pierde \ la \ subasta)(0)$$

$= p(a_1 > a_2)(\theta_1 - a_1) + 0 + 0 \ = p(a_1 > \frac{\theta_2}{2})(\theta_1 - a_1)$

$= p(\theta_2 < 2a_1)(\theta_1 - a_1) = 2a_1(\theta_1 - a_1)$

Para obtener la maximización, hacemos la derivada de E_{θ_2} respecto a_1:

$$\frac{\partial E_{\theta_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{\theta_2}{2})]}{\partial a_1} = 2(\theta_1 - 2a_1) = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = \theta_1/2$$

$$\frac{\partial^2 E_{\theta_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{\theta_2}{2})]}{\partial a_1^2} = -4 < 0 \text{ (que correspende a un máximo)}$$

Ahora vemos que, la repuesta óptima de J1 a la estrategia $\hat{a}_2(\theta_2) = \theta_2/2$ de J2 es $\theta_1/2$. Análogamente, la repuesta óptima de J2 respecto la estrategia de J1 es $\theta_2/2$, y por tanto $(\hat{a}_1(\theta_1) = \theta_1/2, \hat{a}_2(\theta_2) = \theta_2/2)$ es un EB. □

4.3. Un número de n postores y distribución general de valoraciones

En esta sección vamos a explicar el modelo general de subasta en un sobre cerrado al primer precio, en el cual hay un número de n jugadores cuyas valoraciones θ_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y la función de distribución de probabilidad es F sobre $[0, \bar{v}]$ y su función de densidad $f = F'$ es continua en $[0, \bar{v}]$.

Conjunto de acciones: $A_1 = ... = A_n = [0, \bar{v}]$, donde a_i es la puja del postor i.

Conjunto de tipos de los jugadores: $\Theta_1 = ... = \Theta_n = [0, \bar{v}]$, donde el θ_i es la valoración del bien que el postor i adjudica.

Cada postor conoce su valoración del bien, pero no conoce las de los otros.

Conjeturas de los jugadores:

Probabilidades a priori : p$(\theta_i < x) = F(x)$, $\forall i = 1, ..., n, \forall x \in [0, \bar{v}]$

Probabilidad a posteriori : $p_i(\theta_j < x | \theta_i = y) = F(x)$, $\forall i, j = 1, ..., n, i \neq j$, $\forall x, y \in [0, \bar{v}]$

Espacio de estrategias: $\hat{A}_i = \{\hat{a}_i(\theta_i) | \hat{a}_i : [0, \bar{v}] \to [0, \bar{v}]\} \ \forall i \in 1, ..., n$

Funciones de pagos: definimos

$$u_i^I(\theta_i, \theta_{-i}; a_i, a_{-i}) = \begin{cases} \theta_i - a_i & si \quad a_i > a_j \\ \frac{\theta_i - a_i}{j} & si \quad a_i = a_j \\ 0 & si \quad a_i < a_j \end{cases}$$

Teorema 4.3. *Sea una subasta de un bien, en un sobre cerrado al primer precio y con un número cualquiera n de jugadores, en la cual las valoraciones θ_i de los jugadores son variables aleatorias independientes entre sí y tienen una distribución de probabilidad F, la misma para todos, con densidad continua f en [0,$\hat{v}$]. Sea [0,$\hat{v}$] asimismo el intervalo de pujas aceptables.*

Entonces, existe un único EB simétrico en estrategias crecientes y diferenciables y está constituido por las siguientes estrategias:

$$\hat{a}^I(\theta_i) = E[Z|Z < \theta_i], \forall i = 1, ..., n \tag{4.1}$$

donde Z es la variable aleatoria max $\{\theta_j : j \neq i\}$.

Demostración. Supongamos que $\hat{y} : [0, \bar{v}] \to [0, \infty)$ es un EB simétrico en estrategias crecientes y diferenciables de la subasta al primer precio (Θ, ρ, A, u^I)

I) Vamos a ver en primer lugar que (4.1) es una condición necesaria, es decir si $\hat{y}$ es un EB, entonces $\hat{y}(\theta_i) = E[Z|Z < \theta_i]$.

La distribución de probabilidad introducida por $\hat{y}$ en $[0,\infty)$ es difusa, es decir, la probabilidad de que coincidan las valoraciones v_i, v_j de dos postores es nula. Supongamos que eso no es verdad y $b \in [0, \infty)$ es una puja en la cual los jugadores pueden empatar con probabilidad positiva cuando juegan $\hat{y}$. Como ρ es difusa, el conjunto $D = \{\theta \in [0, \bar{v}] \setminus \{b\} : \hat{y}(\theta) = b\}$ tiene una probabilidad positiva. El empate ocurre con probabilidad positiva en la puja b y $\hat{y}$ es un equilibrio, si $v \in D$, y $v > b$. Como D tiene probabilidad positiva, existe $v \in D$, tal que $v > b$. Ahora, existe un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que cada jugador puede desviarse de manera rentable con el tipo v y la estrategia $\hat{y}(v) = b + \epsilon$, y ser el único ganador de la subasta siempre que los tipos de todos los demás jugadores pertenezcan a D; en este caso, este jugador va obtener la ganancia igual a $v - b - \epsilon$, y no hace falta compartirla con los demás jugadores. Por lo tanto, en el resto de la demostración, no necesitamos preocuparnos por el empate, ya que la probabilidad del empate es 0. Tengase en cuenta que $\hat{y}$ es difusa, esto implica que $\hat{y}$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, invertible.

Ahora, vamos a calcular la repuesta óptima $a_i \in [0, \infty)$ del un jugador arbitrario $i \in N$ de tipo θ_i en contra del perfil $\hat{y}$. El jugador **i** tiene el tipo θ_i y entrega una puja estrictamente mayor que θ_i, la función de ganancia es negativo. Así que, $\hat{y}(0) = 0$ y $\hat{y}(\bar{v}) \leq \bar{v}$. Para cada $j \neq i$, deja $\theta_j \in [0, \bar{v}]$. Después **i** gana la puja si $max_{j \neq i} \hat{y}(\theta_j) < a_i$. Porque $\hat{y}$ es creciente, así implica que $max_{j \neq i} \hat{y}(\theta_j) = \hat{y}(max_{j \neq i} \theta_j) = \hat{y}(Z)$. En consecuencia, **i** gana si y sólo si $a_i > \hat{y}(Z)$, o dicho de manera equivalente $\hat{y}^{-1}(a_i) > Z$ donde $\hat{y}^{-1}(a_i)$ denota la función inversa de $\hat{y}$, es decir, es la valoración θ_i que lleva a pujar a_i cuando se juega la estrategia $\hat{y}(\theta_i)$.

Así pues, la ganancia esperada del jugador i si puja a_i en repuesta a las estrategias $\hat{y}(\theta_j)_{j \neq i}$ de los demás es:

$E_{(\theta_j)j \neq i}[u_i^I(\theta_i, \theta_{-i}; a_i, a_{-i})]$
$= prob(i\ gana\ la\ subasta)(\theta_i - a_i) + prob(i\ pierda\ la\ subasta)(0)$
$= prob(\hat{y}^{-1}(a_i) > Z)(\theta_i - a_i) = G(\hat{y}^{-1}(a_i)))(\theta_i - a_i)$

siendo G la función de distribución de la variable aleatoria Z. El problema de maximización de i es

$$max_{a_i \in [0, \bar{v}]}\ G(\hat{y}^{-1}(a_i)(\theta_i - a_i)$$

Para obtener la maximización, hacemos la derivada de $E_{\theta_{-i}}$ respecto a a_i

$$\frac{\partial(G(\hat{y}^{-1}(a_i)(\theta_i - a_i)))}{\partial a_i} = 0$$

A través del teorema de la función inversa, obtenemos:

$$g(\hat{y}(a_i)\frac{\partial(\hat{y}^{-1}(a_i))}{\partial a_i})(\theta_i - a_i) - G(\hat{y}^{-1}(a_i)) = \frac{g(\hat{y}^{-1}(a_i))}{\hat{y}'(\hat{y}^{-1}(a_i))}(\theta_i - a_i) - G(\hat{y}^{-1}(a_i)) = 0$$

donde $g = G'$ es la función densidad de Z. Como hemos restringido el análisis al equilibrio simétrico, y para $\hat{y}$ es un equilibrio, tiene que ser $\hat{y}(\theta_i) = a_i$. Es decir, todos los jugadores presentan puja a_i cuando el tipo es θ_i, así, $\hat{y}^{-1}(a_i) = \theta_i$. Después, una condición necesaria para que $\hat{y}$ sea la solución del problema de maximización planteado, es que $a_i = \hat{y}(\theta_i)$ cumpla la condición de primer orden anterior, de lo que se obtiene:

$$\frac{g(\theta_i)}{\hat{y}'(\theta_i)}(\theta_i - \hat{y}(\theta_i)) - G(\theta_i) = 0$$

$$g(\theta_i)\hat{y}(\theta_i) + G(\theta_i)\hat{y}'(\theta_i) = g(\theta_i)\theta_i$$

que es equivalente a

$$(G(\theta_i)\hat{y}(\theta_i))' = \theta_i g(\theta_i)$$

Como $\hat{y}(0) = 0$, podemos integrar la ecuación diferencial de arriba y obtenemos

$$\hat{y}(\theta_i) = \frac{1}{G(\theta_i)} \int_0^{\theta_i} zg(z)dz = E[Z|Z < \theta_i].$$

Además, resolviendo por partes la integral y teniendo en cuenta que $G(\theta_i) = F(\theta_i)^{n-1}$, dado que las valoraciones son independientes, tenemos

$$\hat{y}(\theta_i) = \frac{1}{G(\theta_i)}[\theta_i G(\theta_i) - \int_0^{\theta_i} G(z)dz] = \theta_i - \int_0^{\theta_i} \frac{G(z)}{G(\theta_i)}dz$$

$$\hat{y}(\theta_i) = \theta_i - \int_0^{\theta_i} \left(\frac{F(z)}{F(\theta_i)}\right)^{n-1} dz < \theta_i$$

lo que nos permite confirmar de un modo efecto que la puja óptima es inferior a la valoración.

Hasta aquí, ya hemos demostrado que $\hat{a}^I$ es el único candidato para ser un EB simétrico, diferenciable, y creciente de la subasta al primer precio.

II) Veamos ahora que (4.1) es condición suficiente, es decir que si $\hat{a}^I(\theta_i) = E[Z|Z < \theta_i]$, entonces $\hat{a}^I(\theta_i)$ es un EB simétrico.

Sea $i \in N$ y θ_i su tipo. Sea $a_i \in [0, \bar{v}]$, si $a_i > \hat{a}^I(\bar{v})$, entonces a_i está estrictamente dominando por $\frac{\hat{a}^I(\bar{v})+a_i}{2}$. Así que, suponemos $a_i \in [0, \hat{a}^I(\bar{v})]$. Si $v = (\hat{a}^I)^{-1}(a_i)$, entonces, $\hat{a}^I(v) = a_i$. Sea $u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}, a_i))$ la función de pagos del jugador i cuando él ha sido informado su tipo que es θ_i, i está jugando el perfil de la acción a_i, y otros jugadores están siguiendo el perfil $\hat{a}_i$ Después, su pago esperado es

$$\begin{aligned} u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, a_i)) &= \text{prob}(i \text{ gana la subasta})(\theta_i - a_i) + \text{prob}(i \text{ pierda la subasta})(0) \\ &= \text{prob}((\hat{a}^I)^{-1}(a_i) > Z)(\theta_i - a_i) = G((\hat{a}^I)^{-1}(a_i))(\theta_i - a_i) \\ &= G(v))(\theta_i - a_i) = G(v)(\theta_i - \hat{a}^I(v)) = G(v)\theta_i - G(v)\hat{a}^I(v) \\ &= G(v)\theta_i - G(v)E[Z|Z < \theta_i] = G(v)\theta_i - \textstyle\int_0^v wg(w)dw \\ &= (\text{integrando por partes, con } w = u \text{ y } g(w)dw = dv) \\ &= G(v)\theta_i - G(v)v + \textstyle\int_0^v G(w)dw = G(v)(\theta_i - v) + \int_0^v G(w)dw \end{aligned}$$

Seguidamente, comparamos la ganancia obtenido con $a_i(= \hat{a}^I(v))$ y la ganancia obtenido con $\hat{a}^I(\theta_i)$. El pago esperado con la valoración θ_i del jugador i es

$$u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}^I(\theta_i))) = G(\theta_i)(\theta_i - \theta_i) + \int_0^v G(w)dw = \int_0^v G(w)dw$$

La diferencia es

$$u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}^I(\theta_i))) - u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, a_i)) = \int_0^{\theta_i} G(w)dw + G(v)(v - \theta_i) - \int_0^v G(w)dw$$

y dicha diferencia es siempre positiva, tanto si $v \leq \theta_i$ como $v \geq \theta_i$, por ser G creciente.

si $v \geq \theta_i : u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}^I(\theta_i))) - u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, a_i)) = G(v)(v - \theta_i) - \int_{\theta_i}^v G(w)dw$. Y tenemos $\int_{\theta_i}^v G(w)dw \leq G(v)(v - \theta_i)$

si $v \leq \theta_i : u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}^I(\theta_i))) - u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, a_i)) = G(v)(v - \theta_i) - \int_{\theta_i}^v G(w)dw$. Y tenemos $\int_{\theta_i}^v G(w)dw \geq G(v)(v - \theta_i)$

En ambos casos tenemos $u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}^I(\theta_i))) \geq u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, a_i))$. Por lo tanto, las desviaciones de $\hat{a}^I(\theta_i)$ no son rentables. Así, $\hat{a}^I$ es un único equilibrio Bayesiano de Nash de la subasta al primer precio. □

Corolario 4.4. *Si la distribución de probabilidad F es la uniforme, el único EB simétrico está constituido por las siguientes estrategias:*

$$\hat{a}^I(\theta_i) = \frac{(n-1)\theta_i}{n}, \quad \forall i = 1, ..., n \tag{4.2}$$

Demostración. Por el Teorema 4.3, sabemos que el único EB simétrico es $\hat{a}^I$ donde $\hat{a}^I(\theta_i) = E[Z|Z < \theta_i]$. Si la distribución de probabilidad es uniforme, eso significa que $F(x) = x$, $f(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Por otra parte, como que las valoraciones son independientes, podemos deducir que

$$G(x) = prob(Z < x) = prob(max_{j \neq j} \theta_j < x) = prob(\theta_j < x, \forall j \neq i) = (F(x))^{n-1}$$

En consecuencia, tenemos:

$$\hat{a}^I(\theta_i) = E[Z|Z < \theta_i] = \frac{1}{G(\theta_i)} \int_0^{\theta_i} wg(w)dw = \frac{1}{(F(\theta_i))^{n-1}} \int_0^{\theta_i} wg(w)dw = \star$$

$$F(\theta_i) = \theta_i; \; g(w) = G'(w) = ((F(w))^{n-1})' = (n-1)(F(w))^{n-2} f(w)$$

$$\star = \frac{1}{\theta_i^{n-1}} \int_0^{\theta_i} w(n-1)w^{n-2} dw$$

$$= \frac{n-1}{\theta_i^{n-1}} [\frac{w^n}{n}]_0^{\theta_u} = \frac{(n-1)\theta_i}{n}$$

□

Observamos también que conforme crece el número de postores, la puja de equilibrio se acerca cada vez más a la valoración $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n-1)\theta_i}{n} = \theta_i$

4.4. Dos postores aversos al riesgo y distribución uniforme

Un concepto importante a tener en cuenta a la hora de analizar la toma de decisiones de un agente es la aversión al riesgo. Podemos definir la aversión al riesgo como aquella preferencia que tiene el ser humano ante dos elecciones, elegir la opción con menos riesgo aunque la otra opción con más riesgo sea más beneficiosa.

Este juego tiene los mismos elementos que el caso anterior, excepto las ganancias. Es importante no confundir el valor esperado con la utilidad esperada. Ahora las utilidades que a cada jugador reporta cada resultado del juego no coinciden con los beneficios sino que son una función estrictamente cóncava de los beneficios. Para concretar, supongamos que se trata de la raíz cuadrada positiva de los beneficios. Entonces las ganancias de los jugadores son ahora:

$$u_i^I(\theta_i, \theta_j; a_i, a_j) = \begin{cases} q(\theta_i - a_i) = (\theta_i - a_i)^{\frac{1}{2}} & si \quad a_i > a_j \\ 0 & si \quad a_i < a_j \\ q(\frac{\theta_i - a_i}{2}) = (\frac{\theta_i - a_i}{2})^{\frac{1}{2}} & si \quad a_i = a_j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2$$

Teorema 4.5. *Sea una subasta de un bien, en un sobre cerrado al primer precio y con dos jugadores, en el cual las valoraciones de ambos jugadores son independientes y tienen una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [0,1]. Sea [0,1] asimismo el intervalo de pujas aceptables, y supongamos que la utilidad de cada jugador i viene dada por la función estrictamente cóncava de los beneficios* $q(\theta_i - a_i) = (\theta_i - a_i)^{\frac{1}{2}}$.

Entonces, el perfil simétrico $(\hat{a}_1(\theta_1) = \frac{2\theta_1}{3}, \hat{a}_2(\theta_2) = \frac{2\theta_2}{3})$ *es un equilibrio Bayesiano del juego.*

Demostración. Supongamos que el jugador 2 elige la estrategia $\hat{a}_2(\theta_2) = \frac{2\theta_2}{3}$ y veamos que la repuesta óptima esperada de J1 es la estrategia $\hat{a}_1(\theta_1) = \frac{2\theta_1}{3}$. L significa que la acción $a_1 = \frac{2\theta_2}{3}$ es solución, para cualquiera valoración θ_1. Ahora calculamos la máxima ganancia esperada de J1:

$$max\ E_{\theta_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{3\theta_2}{2})] \quad a_1 \in [0,1]$$

donde E_{θ_2} es el valor esperado de J1 según la variable aleatoria θ_2, y la función de ganancias $u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{2\theta_2}{3})$ de J1.

Expresamos la ganancia esperada de J1 como:

$$\begin{aligned} E_{v_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \tfrac{2\theta_2}{3}) &= \text{prob(J1 gana la subasta)}q(\theta_1 - a_1) \\ &= \text{prob}(a_1 > \tfrac{2\theta_2}{3})q(\theta_1 - a_1) \\ &= \text{prob}(\theta_2 < \tfrac{3a_1}{2})q(\theta_1 - a_1) = 3a_1 q(\tfrac{\theta_1 - a_1}{2}) \end{aligned}$$

Para obtener la maximización, hacemos la derivada de E_{θ_2} respecta a_1:

$$\frac{\partial E_{\theta_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{\theta_2}{2})]}{\partial a_1} = 3q(\frac{\theta_1 - a_1}{2}) - 3a_1 q'(\frac{\theta_1 - a_1}{2}) = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = \frac{q(\theta_1 - a_1)}{q'(\theta_1 - a_1)}$$

$$\frac{\partial^2 E_{\theta_2}[u_1^I(\theta_1, \theta_2, a_1, \frac{\theta_2}{2})]}{\partial a_1^2} = -3q'(\frac{\theta_1 - a_1}{2}) - 3a_1 q'(\frac{\theta_1 - a_1}{2}) + 3a_1 q''(\frac{\theta_1 - a_1}{2}) < 0$$

(que correspende a un máximo, ya que $q' > 0$ y $q'' < 0$)

En el caso particular, $q(\theta_1 - a_1) = (\theta_1 - a_1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \ a_1 = \frac{q(\theta_1 - a_1)}{q'(\theta_1 - a_1)} = 2(\theta_1 - a_1)$

se deduce que $a_1 = \frac{2\theta_1}{3}$. Así pues, la puja óptima de J1 es $\hat{a}_1(\theta_1) = \frac{2\theta_1}{3}$ a la estrategia $\hat{a}_2(\theta_2) = \frac{2\theta_2}{3}$ de J2. Análogamente, $\hat{a}_2(\theta_2) = \frac{2\theta_2}{3}$ es repuesta óptima de J2 respecta la estrategia $\hat{a}_1(\theta_1) = \frac{2\theta_1}{3}$ de J1. Por lo tanto, $(\hat{a}_1(\theta_1) = \frac{2\theta_1}{3}, \hat{a}_2(\theta_2) = \frac{2\theta_2}{3})$ es un EB.

$\square$

Obviamente, en el caso de valoraciones uniformemente distribuidas, la puja de equilibrio de los jugadores aversos al riesgo es mayor que la de los neutrales al riesgo. En general, en las subastas de primer precio con valoraciones independientes, un postor averso al riesgo presentará una puja mayor que en el caso de ser neutral al riesgo. Esto se debe a que las pujas más altas aumentan las probabilidades de ganar, y en el caso de la aversión al riesgo, se pueden compensar las menores ganancias esperadas.

4.5. Subasta en sobre cerrado al segundo precio

En este caso, la subasta del segundo precio tiene los mismos elementos que con la del primer precio, salvo la función de pagos. Hay N postores que acuden a una subasta para comprar un objeto. Cada uno de los jugadores debe entregar en sobre cerrado su puja y se adjudica el objeto a aquel postor que escribió la puja más alta. Pero en este caso, aquel postor con la puja más alta pagará la segunda puja más alta.

Definición 4.6. *Un juego de subasta de segundo precio con el conjunto de jugadores N es un 4-tupla $(\Theta, \rho, A, u^{II})$ en el cual los elementos son los mismos que en el caso del primer precio excepto la diferencia siguiente:*

Las funciones de pagos: $u^{II} := \prod_{i=1}^{n} u_i^{II}$, *donde, para cada* $i \in N$,

$u_i^{II} : [0, \bar{v}] \times A \to \mathbb{R}$ *esta definido como abajo*

$$u_i^{II}(\theta_i, a) = \begin{cases} \theta_i - max_{j \neq i} a_j & si \quad a_i > max_{j \neq i} a_j \\ \frac{\theta_i - max_{j \neq i} a_j}{|\{j : a_j = max_{k \in N} a_k\}|} & si \quad a_i = max_{j \neq i} a_j \\ 0 & si \quad a_i < max_{j \neq i} a_j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2$$

Para cada $i \in N$*, la función (Bayesiana) de pagos esta definido como la subasta del primer precio análogamente.*

Este juego es más fácil de resolver, incluso para el caso en que las valoraciones siguen una distribución no necesariamente uniforme, y se permite que los jugadores sean aversos, neutrales o propensos al riesgo.

A través de los teoremas siguientes, vamos a demostrar que la estrategia dominante para cada jugador es pujar precisamente a su valoración.

Teorema 4.7. *Sea* $(\Theta, \rho, A, u^{II})$ *una subasta de un bien, en sobre cerrado al segundo precio y con un conjunto de jugadores N. Para cada* $i \in N$*, la estrategia definida por* $\hat{a}_i^{II}(\theta_i) := \theta_i$ *es una estrategia dominante, es decir, para cada* $\hat{a}_{-i} \in \hat{A}_{-i}$ *y cada* $\hat{a}_i \in \hat{A}_i$, $\hat{u}_i^{II}(\hat{a}-i, \hat{a}^{II}) \geq \hat{u}_i^{II}(\hat{a}_{-i}, \hat{a}_i)$.

Demostración. Sea $\hat{a}_{-i} \in A_{-i}$ y $\hat{a}_i \in A_i$. Sea $\theta \in [0, \bar{v}]^n$, y vamos a probar la afirmación de que para cada jugador i, la estrategia de pujar su verdadera valoración θ_i es una estrategia débilmente dominante. Para ello, consideraremos los casos $\hat{b} > \theta_i$ y $\hat{b} < \theta_i$ (supondremos por simplicidad que la probabilidad del caso $\hat{b} = \theta_i$ es cero), donde $\hat{b} := max_{j \neq i} \hat{a}_j(\theta_j)$ es la puja máxima del resto de jugadores que compiten con el jugador i, comparamos las ganancias resultantes de hacer $b = \theta_i$ (pujar el valor b igual con la verdadera valoración) con las de hacer $b > \theta_i$ (pujar por encima de la verdadera valoración) y de hacer $b < \theta_i$ (pujar por debajo de la verdadera valoración).

I) Supongamos que $\hat{b} > \theta_i$ (la máxima puja del resto de los jugadores es superior que la valoración del jugador i). Según esta hipótesis, explicamos distintos casos en función de la puja que realice del jugador i:

- $b = \theta_i$**:** la puja del jugador i es igual a su valoración, la ganancia del jugador i es cero. Y si $b < \hat{b}$, el jugador i no gana la subasta, por lo tanto no gana ni paga nada.

- $b > \hat{b} > \theta_i$**:** la puja del jugador i es mayor que la máxima puja del resto jugadores, el jugador i obtiene una ganancia $\theta_i - \hat{b} < 0$, y como $b > \hat{b}$, el jugador i gana la subasta, pero tiene que pagar una cantidad superior su valoración.
- $\hat{b} > b > \theta_i$ la puja del jugador i es menor que su valoración, y su valoración es menor que la máxima puja del resto de jugadores. Así, el jugador i obtiene una ganancia 0 y pierda la subasta. Por lo tanto no obtiene ni paga nada.
- $\hat{b} > \theta_i > b$ la puja del jugador i es menor que su valoración, así implica que su ganancia puede ser positiva, pero su valoración es menor que la puja máxima del resto de jugadores, al final no gana la subasta ni paga nada.

Por lo tanto, en el caso de que la puja máxima del resto de jugadores esté por encima de la valoración del jugador i, pujar dicho valor domina débilmente a pujar algo diferente. Y el jugador i se asegura no sufrir una ganancia negativa.

II) Supongamos ahora que $\hat{b} < \theta_i$ (la puja máxima del resto de jugadores es inferior a la valoración del jugador i). Bajo esta hipótesis, distinguimos 4 casos diferentes:

- $\theta_i = b > \hat{b}$ la puja del jugador i es igual a su valoración, el jugador i obtiene la ganancia positiva $\theta_i - \hat{b}$, y gana la subasta.
- $\theta_i > b > \hat{b}$ la puja del jugador i es mayor que la máxima del resto de jugadores, i gana la subasta con la ganancia positiva $\theta_i - \hat{b}$; la misma ganancia si puja θ_i.
- $\theta_i > \hat{b} > b$ la puja del jugador i es menor que la máxima puja del resto de jugadores, por tanto no gana la subasta ni paga nada.
- $\theta_i > b = \hat{b}$ la puja del jugador i es igual a la máxima puja del resto de jugadores, i obtiene el objeto con el beneficio $\frac{\theta_i - \hat{b}}{k}$, donde $k \geq 2$ es el número de jugadores que pujan dicha cantidad $\hat{b}$. Por tanto, i va a ser mejor si puja θ_i.

Por lo tanto, la puja menor que θ_i nunca puede ser mejor que la puja θ_i, a veces, se obtiene una ganancia peor. □

Teorema 4.8. *Sea una subasta en sobre cerrado al segundo precio, el perfil de estrategia* $\hat{a}^{II}$ *es el único equilibrio Bayesiano de Nash simétrico, en estrategias crecientes y diferenciables.*

Demostración. Sea $\hat{y} : [0, \bar{v}] \to [0, \infty)$ un equilibrio Bayesiano de Nash simétrico en estrategias crecientes y diferenciables de la subasta al segundo precio $(\Theta, \rho, A, u^{II})$. Demostramos en dos pasos que para cada $I \in N$ y cada $\theta \in [0, \bar{v}]$, la puja θ es una estrategia estrictamente dominante para el jugador i.

I) Demostramos que, para cada $\theta \in (0, \bar{v}), \hat{y}(\theta) \geq \theta$.

Supongamos, por el contrario que $\theta \in (0, \bar{v})$ tal que $\hat{y}(\theta) > \theta$. Por la continuidad de $\hat{y}$, $\exists\ \underline{b} \in (0, \theta)$, tal que $\hat{y}(\underline{b}) > \theta$. Fijado $i \in N$, como ρ tiene "full support" (en el caso de que Ω y Θ son finitos, $\forall \omega \in \Theta, \forall \theta \in \Theta, \rho(\theta, \omega) > 0$) con probabilidad positiva, para cada $j \neq i, \theta_j \in (\underline{b}, \theta)$. Así que, si i tiene tipo $\theta_i = \theta$, hay una probabilidad positiva de que i gane la subasta y pague algo superior a θ al presentar la oferta $\hat{y}(\theta)$, incurriendo en una pérdida con respecto a lo que obtendría presentando la puja θ (que siempre garantiza un pago no negativo).

II) Demostramos que, para cada $\theta \in (0, \bar{v}), \hat{y}(\theta) \leq \theta$.

Supongamos, por el contrario que, $\theta \in (0, \bar{v})$ tal que $\hat{y}(\theta) < \theta$. Por la continuidad de $\hat{y}$, $\exists\ \overline{b} \in (0, \theta)$, tal que $\hat{y}(\overline{b}) < \theta$. Fijado $i \in N$, como ρ tiene "full support" con probabilidad positiva, para cada $j \neq i, \theta_j \in (\theta, \overline{b})$. Así que, si i tiene tipo $\theta_i = \theta$, hay una probabilidad positiva de que i no gane la subasta y pague algo superior a θ al presentar la oferta $\hat{y}(\theta)$, mientras que él obtendría un beneficio estrictamente positivo que presente la puja θ.

$\square$

4.6. El principio de equivalencia de ingresos

En el estudio de las subastas en sobre cerrado que hemos analizado hasta ahora, se tienen diferentes reglas posibles para asignar el objeto, diferentes hipótesis sobre la naturaleza y el conocimiento de las valoraciones y además la actitud ante el riego de los postores. Para cada situación, existe un tipo especial de equilibrio simétrico y, en consecuencia, un comportamiento predecible de los postores que depende fuertemente de las características de cada situación

Una vez que hemos caracterizado las estrategias de equilibrio de los formatos de subastas, nos aparece una duda: ¿cuál de las subastas produce mayores ingresos para el vendedor? El teorema siguiente establece que, desde punto de vista del vendedor, dentro de una gama amplia de tipos de subastas, las características de la subasta no afectan al ingreso esperado. Antes de enunciarlo necesitamos algo de terminología.

Todas las subastas en sobre cerrado que hemos estudiado en este capítulo, que asigna el bien a un postor al azar, se les denominan subastas **estándar** porque tienen la propiedad de adjudicar el bien al postor que ha hecho la puja más alta.

Teorema 4.9. *Consideramos todas las subastas estándar de un bien, en sobre cerrado y con un número n de postores neutrales al riesgo, cuyas valoraciones θ_i son variables aleatorias sobre $[0, \bar{v}]$ independientes e idénticas, y cuyas pujas aceptables están asimismo en $[0, \bar{v}]$.*

Entonces, en cualquier equilibrio Bayesiano simétrico en estrategias estrictamente crecientes en el que cualquier jugador con valoración nula realiza un pago con valor esperado nulo, el vendedor del bien obtiene el mismo ingreso esperado.

Demostración. Suponemos que H es una subasta estándar cualquiera. Sea $v_i \in [0, \bar{v}]$, y el perfil $\hat{a}(v_i)$ es un EB simétrico con estrategias estrictamente crecientes de H. $\pi(v_i)$ es el pago esperado del jugador i quien realiza el tipo v_i. Por hipótesis, $\pi(0) = 0$, es decir, si su valoración de este bien es cero, no va a pagar nada por este objeto.

Como la demostración anterior, consideramos $Z = max\{v_j : j \neq i\}$, es decir, Z es la máxima valoración de todos jugadores excepto el i. Supongamos que la función de distribución de la valoración v_i es F, y la densidad es $f = F'$, la función de distribución de Z es G con densidad $g = G'$. El jugador i gana la subasta si y sólo si su puja a_i es mayor que la del resto de jugadores, asignamos que es $\alpha_i = max\{a_j : j \neq i\}$. Por otra parte, el hecho de que $\hat{a}$ sea estrictamente creciente, $\alpha_i = max\{\hat{a}(v_j) = a_j : j \neq i\} = \hat{a}(Z)$. En consecuencia, i gana $\Leftrightarrow a_i > \hat{a}(Z) \Leftrightarrow \hat{a}^{-1}(a_i) > Z$

Supongamos que, excepto el jugador i, el resto de jugadores juegan las estrategias de equilibrio $\hat{a}(v_j)$. Si v_i es la valoración del jugador i, con esta valoración, i hace una puja a_i, y su ganancia esperada es:

$$\begin{aligned} U_i(a_i, v_i) &= prob(\hat{a}(a_i) > Z)(v_i - a_i) = G(\hat{a}^{-1}(a_i))(v_i - a_i) = G(v)(v_i - \hat{a}(v)) \\ &= G(v)v_i - G(v)\hat{a}(v) \end{aligned}$$

$G(v)v_i$ es el valor esperado de lo que se recibe y $G(v)\hat{a}(v)$ es el valor esperado de lo que se paga, donde $v = \hat{a}^{-1}(a_i)$, es decir, determinaría la valoración basada en las estrategias del equilibrio asumido, la puja a_i.

Ahora queremos ver que $G(v)\hat{a}(v) = \pi(v)$. Ya sabemos que el término $G(v)\hat{a}(v)$ es el valor esperado de lo que el jugador i paga en el caso que la valoración es v_i, en respuesta a las estrategias del equilibrio $(\hat{a}(v_j), \forall j \neq i)$. También podemos ver que $a_i = \hat{a}v$, es el valor esperado de lo que el jugador i paga cuando, con valoración v, responde con la puja $\hat{a}(v)$, que correspondería a su estrategias de equilibrio.

En consecuencia,

$$U_i(a_i, v_i) = G(v)v_i - G(v)\hat{a}(v_i) = G(v)v_i - \pi(v)$$

Ahora hacemos la derivada de $U_i(a_i, v_i)$ respecta la valoración v para maximizar la ganancia esperada de i.

$$max_{v\in[0,\hat{v}]} U_i(a_i, v_i) = max_{v\in[0,\hat{v}]}(G(v)v_i - \pi(v))$$

$$\frac{\partial(G(v)v_i - \pi(v))}{\partial v} = g(v)v_i - \frac{d}{dv}\pi(v)$$

Como la puja de equilibrio $\hat{a}(v)$ es óptima, se cumple la condición anterior al sustituir a_i por $\hat{a}(v_i)$, o lo que es lo mismo, al sustituir v por v_i, y obtenemos:

$$g(v_i)v_i - \frac{d}{dv_i}\pi(v_i) = 0 \Rightarrow \pi(v_i) = \int_{\pi(0)=0}^{v_i} g(w)w \, dw$$

$$\pi(v_i) = G(v_i)E[Z|Z < v_i]$$

Así que, si la valoración de cualquier jugador i es v_i, el valor esperado $\pi(v_i)$ del pago del i realiza en ese equilibrio es el producto de $G(v_i)$ por $E[Z|Z < v_i]$, el $G(v_i)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria de valoración no alcance el valor v_i, y $E[Z|Z < v_i]$ es el valor esperado de la mayor de las valoraciones Z del resto de jugadores supuesto que Z es menor que v_i. Observamos que este valor esperado no depende de las reglas, sino sólamente de la naturaleza de la variable aleatoria de valoración.

Ahora hemos terminado de analizar el valor esperado de pago de los jugadores, el ingreso esperado del vendedor es n veces el valor esperado, antes de conocer su valoración, del pago a realizar por cualquier jugador i.

En conclusión el ingreso esperado del vendedor es:

$$nE_{v_i}[\pi(v_i)] = nE_{v_i}[G(v_i)E[Z|Z < v_i]]$$

□

Observación 4.10. Este teorema se funda en las suposiciones de valoraciones privadas e independientes, simetría de las funciones de distribución de las valoraciones y neutralidad al riego.

4.7. Algunos ejemplos de aplicación del principio de equivalencia de ingresos

Ejemplo 4.11. Caso en que las valoraciones v_i están uniformemente distribuidas en [0,1]

Según el citado principio, cualquier subasta A del tipo descrito ha de producir el siguiente ingreso esperado del vendedor:

$$nE_v[\pi(v)] = nE_v[G(v)E[Z|Z < v]]$$

Supongamos que las valoraciones v están uniformemente distribución en [0,1], la función de distribución de v es $F(x) = x$, mientras que la función de distribución de $Z = max\{a_1, ...a_{n-1}\}$ es:

$$G(x) = \prod_{i=1}^{n-1} P(a_i < x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1}$$

En este caso, el valor esperado $\pi(v)$ del pago que cualquier jugador i realiza en ese equilibrio si su valoración es v resulta ser

$$G(v)E[Z|Z < v] = v^{n-1}\frac{(n-1)v}{n} = \frac{(n-1)v^n}{n}$$

Por tanto, el ingreso esperado es

$$nE_v[\pi(v)] = \int_0^1 (n-1)w^n dw = [\frac{(n-1)w^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{n-1}{n+1}$$

Ejemplo 4.12. Cálculo del EB simétrico en la subasta "todos pagan", para el caso en que las valoraciones v_i están uniformemente distribuidas en [0,1]

La subasta "todos pagan" denotaremos TP que es un juego con n jugadores que acuden a una subasta para comprar un objeto. Deben presentar la puja en el sobre cerrado, que es la cantidad dispuesta a pagar por el objeto. Se adjudica el objeto a aquel postor que escribió una puja más alta, pero se les hace pagar a todos los postores la puja que han escrito. Si hay varias postores que presentan la misma puja más altas, se adjudica el objeto a uno de estos postores al azar. Y en este caso las ganancias del juego son las utilidades que cada jugador atribuye a los beneficios.

Según el citado principio, consideramos el valor esperado del pago que cualquier jugador i realiza en equilibrio (del tipo indicado) si su valoración es v_i es

$$\pi^{TP}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\ dw = G(v_i)E[Z|Z < v_i]$$

Por otra parte, en esta subasta el pago que cada jugador i realiza coincide exactamente con su puja, y si el perfil $(\hat{a}(v_i))\, \forall i \in N$ es un equilibrio del tipo citado, la puja de equilibrio $\hat{a}(v_i)$ coincide con

$$\pi^{TP}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\ dw$$

Ahora necesitamos demostrar que el perfil simetría $\hat{a}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\ dw$ es un equilibrio Bayesiano en estrategias crecientes y diferenciables y además el pago esperado con valoración privada cero es cero.

Supongamos que, salvo un cualquier jugador i, los restos $n-1$ jugadores juegan las estrategias $\hat{a}(v_j) = \int_0^{v_j} wg(w)\ dw, \forall j = 1, ..., n-1$. Por la misma razón que en la demostración del Teorema 4.3, podemos ver que la estrategia $\hat{a}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\ dw$ del jugador i es la repuesta óptima esperada a las anteriores. Si v_i es la valoración del jugador i, y hace una puja a_i (la que el jugador debe pagar, lo que sea ganar o perder), su ganancia esperada es:

$$U_i(a_i, v_i) = prob\ (i\ gana\ la\ subasta)(v_i - a_i) + prob\ (i\ pierde\ la\ subasta)(-a_i)$$

$$= prob\ (x_i > Z)(v_i - a_i) + (1 - prob\ (x_i > Z))(-a_i)$$

$$= G(x_i)(v_i - a_i) + (1 - G(x_i))(-a_i) = G(x_i)v_i - a_i$$

$= G(x_i)v_i - \hat{a}(v_i) = G(x_i)v_i - E[Z|Z < v_i]$

$= G(x_i)v_i - \int_0^{x_i} wg(w)\ dw$

donde hemos llamado x_i a $\hat{a}^{-1}(a_i)$. Esta ganancia esperada coincide exactamente con la obtenida, es decir, al hacer una puja a_i siendo v_i la valoración, en la subasta al primer precio, tal como se ha deducido en la demostración de Teorema 4.3. Por lo tanto, por las misma razones, la puja óptima de i es $\hat{a}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\ dw$. En consecuencia el perfil $\hat{a}(v_i), \forall i = 1, ..., n$ es un EB, y es obvio que las estrategias $\hat{a}(v_i) = \int_0^{v_i}$ son creciente porque g(w) es positiva con $w \in [0, v_i]$ y además $\hat{a}(0) = 0$

Resumiendo, en la subasta "todos pagan" el único EB del tipo citado es $(\hat{a}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\ dw)_{i=1,2,...,n}$. Y como las valoraciones son independientes e idénticas, siguen la distribución uniforme, que significa $G(w) = (F(w))^{n-1} = w^{n-1}$, obtenemos:

$$\hat{a}(v_i) = \int_0^{v_i} w^n\ dw = [\frac{w^{n+1}}{n+1}]_0^{v_i} = \frac{v_i^{n+1}}{n+1}$$

y por tanto el único EB del tipo citado es

$$(\hat{a}(v_i) = \frac{v_i^{n+1}}{n+1})_{i=1,2,...,n}$$

Aplicando el teorema mencionado anteriormente, el valor esperado del pago que cualquier jugador i realiza en ese equilibrio si su valoración es v_i resulta ser

$$\pi(v_i)^{TP} = G(v_i)E[Z|Z < v_i] = v_i^{n-1}\frac{v_i^{n+1}}{n+1} = \frac{v_i^2}{n+1}$$

y por tanto, el ingreso esperado es

$$nE_{v_i}[\pi(v_i)^{TP}] = \frac{n}{n+1}\int_0^1 w^{n+1}\ dw = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

5. La segunda aplicación: Diseño de mecanismos

Los problemas del diseño de mecanismos constituyen uno de los principales campos de aplicación de los juegos Bayesianos. En efecto, las subastas pueden ser consideradas como una clase especial de mecanismos. Ahora presentamos un ejemplo para explicar qué es un diseño de mecanismos. El mánager de una empresa quiere contratar un nuevo trabajador y hay dos candidatos. Cada uno de ellos puede tener un tipo de alta productividad o de baja productividad pero esta información es desconocida para el mánager. El mánager obviamente quisiera contratar al que tiene una alta productividad. Sin embargo, no está claro cómo lograr este objetivo. Si el mánager pregunta los candidatos sobre sus tipos, el candidato de " tipo bajo" podría fingir que él es de "tipo alto", es decir, reportaría incorrectamente. Así, el problema del mánager es diseñar un mecanismo (en este caso es un contrato) que proporciona a los candidatos incentivos apropiados para decir la verdad. En general, esto sólo se puede hacer de una manera costosa, y la dificultad está en diseñar un mecanismo lo más eficiente posible desde el punto de vista del mánager.

Generalmente, un problema del diseño de mecanismo se puede describir de la siguiente manera. Supongamos que hay un jugador distinguido, el director, y hay otros jugadores, los agentes, que tienen un conocimiento privado. Tanto el director como los agentes se enfrentan a una situación estratégica en la cual el director desea tomar una acción condicionada a los tipos de agente. Así que, el director debe diseñar un mecanismo que le permite extraer información de los agentes para tomar la acción más rentable para él. En la mayoría de los casos, cuesta mucho asegurar que la información recibida es verídica. Por lo tanto, existe una compensación entre el coste de la extracción de la información y la ganancia extra que el director puede obtener al conocer dicha información.

Describimos para empezar, las bases del modelo. Supongamos que hay $n + 1$ jugadores, los n agentes $i \in N = \{1, ..., n\}$, y el director que es el jugador (n+1). Cada agente $i \in N$ tiene un tipo $\theta_i \in \Theta_i$ y el conjunto de los perfiles del tipo es $\Theta = \prod_{i\in N} \Theta_i$. Los tipos se extraen de una distribución de probabilidad ρ definida sobre Θ y cada jugador recibe información privada sobre su propio tipo. Esta situación es muy parecida al caso que hemos presentado en el capítulo anterior. Al conocer el tipo de un jugador, también conocemos su información, así que, el espacio de tipos y los estados del mundo son la misma cosa. Por lo tanto, no necesitamos la generalidad completa de la definición del juego Bayesiano. El director tiene que hacer la elección en un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto, convexo i no-vacío y elige un vector $p \in \mathbb{R}^n$ de pagos para los agentes (transferencia monetaria que puede ser negativa o positiva), es decir, él tiene que proponer una asignación $z = (c, p) \in C \times \mathbb{R}^n$. Los agentes podrían aceptar o rechazar esta asignación, es decir, cada agente tiene una **opción externa** que le da sus *pago de reserva*. Supongamos que el pago de reserva es 0. Todos los jugadores tienen las funciones de pagos como: $\forall i \in \{1, ..., n+1\}, u_i : \Theta \times C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Idealmente, el director elige la asignación sobre los tipos de los agentes para maximizar su beneficio. Como la información de los agentes es privada, el director diseña un mecanismo según el cual los agentes le envían mensajes que, eventualmente, es posible que revelen alguna información. En vista de los mensajes recibidos, el director elige una asignación. Un mecanismo es un juego estratégico para los agentes, donde sus conjuntos de estrategias pueden ser los posibles mensajes que ellos han enviado al director. Sea $M = \prod_{i \in N} M_i$ el conjunto del los perfiles de mensajes. Para cada perfil de mensaje, el director selecciona una asignación según la aplicación $S : M \to C \times \mathbb{R}^n$, a la que nos referimos como un *esquema de asignación.* Cabe mencionar que, el director no es el jugador en el mecanismo, es decir, él se compromete con un esquema de asignación S que se anuncia públicamente a los agentes antes de que jueguen. Las funciones de pagos se definen combinando S y funciones u_i.

La cadena del juego Bayesiano asociado es:

i) Los tipos se realizan, cada jugador es informado solo sobre su tipo, y el director no recibe información.

ii) El director propone un mecanismo (se compromete a una asignación).

iii) Los agentes envían sus mensajes.

iv) El director selecciona una asignación y los pagos se realizan.

Las decisiones de los agentes en el paso iii) son condicionales a sus tipos, así, en el paso iv), la asignación seleccionada por el director depende del tipo solo a través de los mensajes de los agentes. Hay problemas de diseño de mecanismos en los cuales los agentes pueden decidir si participan en el juego propuesto por el director o no (y obtienen el pago de la reserva). En este último caso, asumimos que, para cada $i \in N, r \in M_i$; el mensaje r es rechazo a participar. Tenga en cuenta que los jugadores deciden si participan o no en el paso iii). Una vez que un agente decide participar, no puede rechazar la asignación propuesta por el mecanismo en el paso iv), incluso si el pago correspondiente está por debajo del pago de su reserva.

Definición 5.1. *Un mecanismo con el conjunto de jugadores N es un 5-tupla (Θ, ρ, M, S, u), donde*

Los tipos de los jugadores: $\Theta := \prod_{i \in N} \Theta_i$.

Conjeturas: *La distribución de probabilidad ρ de la que se extraen los tipos (no necesariamente de forma independiente).*

Los perfiles de acción básicos: $M := \prod_{i=1}^{n} M_i$.

Una estrategia pura *del jugador i es una aplicación $\hat{m}_i : \Theta_i \to M_i$. Sea $\hat{M}_i$ el conjunto de estrategias puras de i y $\hat{M} := \prod_{i=1}^{n} \hat{M}_i$*

La esquema de asignación: $S : M \to C \times \mathbb{R}^n$.

Las funciones de pagos: $u := \prod_{i=1}^{n} u_i$, *donde,* $\forall i \in N, u_i : \Theta \times C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Para cada $i \in N$, su* ***función Bayesiana de pagos*** $\hat{u}_i : \hat{M} \to \mathbb{R}$ *está definida por* $\hat{u}_i(\hat{m}) := \int_{\theta_i \in \Theta} u_i(\theta, S(\hat{m}(\theta))) d\rho(\theta)$.

El objetivo del director es diseñar un mecanismo cuya asignación de equilibrio sea rentable para él, es decir, un mecanismo debe verse como la segunda etapa de un juego extensivo con la información incompleta en la que el director es él mismo un jugador con alguna función de utilidad definida sobre $\Theta \times C \times \mathbb{R}^n$. Al principio la naturaleza dibuja los tipos de los agentes, luego el director se compromete a un mecanismo que se observa públicamente sin información sobre las realizaciones de los tipos, en ese momento los agentes eligen sus acciones.

Sin embargo, dado que la clase de todos los mecanismos es muy general, la dificultad de encontrar mecanismos óptimos es un problema difícil para el director. Afortunadamente, el director puede utilizar el principio de revelación para simplificar considerablemente este problema de la siguiente manera.

5.1. El principio de revelación

El principio de revelación, debido a Myerson (1979) en el contexto de los juegos Bayesianos, es un instrumento importante para diseñar juegos cuando los jugadores tienen información privada.

En primer lugar, el director puede limitar su atención a la siguiente clase de juegos:

1 Los agentes hacen declaraciones (quizá falsas) sobre sus tipos. El agente i puede declarar ser cualquier tipo t_i del conjunto Θ_i de posibles tipos de i, independientemente de cuál sea el verdadero tipo i, θ_i.

2 Dadas las declaraciones de los agentes $(t_1, ..., t_n)$ el jugador i ofrece $x_i(t_1, ..., t_n)$.

Definición 5.2. *Se dice que un mecanismo es **directo** si $M = \prod_{i \in N} \Theta_i \cup \{r\}$, es decir, los posibles mensajes (declaraciones) de los jugadores coinciden con sus tipos y la decisión de no participar.*

Definición 5.3. *Dado un mecanismo directo, si es un equilibrio para los agentes revelar sus verdaderos tipos, entonces se dice que el equilibrio es verdadero. (En particular, en un equilibrio verdadero, todos los agentes aceptan participar el juego, así podemos afirmar que $M = \prod_{i \in N} \Theta_i$) Un mecanismo directo en el cual decir la verdad constituye un equilibrio Bayesiano de Nash se llama **de incentivos compatibles***

Cualquier equilibrio Bayesiano de Nash de un juego Bayesiano puede representarse con un nuevo equilibrio Bayesiano de Nash en un nuevo juego Bayesiano adecuadamente escogido, en el cual por "representado" queremos decir que para cada posible combinación de tipos de los jugadores $(\theta_1, ...\theta_n)$, las acciones y las ganancias de los jugadores en el nuevo equilibrio son idénticos a los del equilibrio original. Independientemente de cuál sea el juego original, el nuevo juego Bayesiano es siempre un mecanismo directo; independientemente del equilibrio original, el nuevo equilibrio siempre consiste en decir la verdad. De manera más formal:

Teorema 5.4. ***(El principio de revelación).*** *Cualquier equilibrio Bayesiano de Nash en un juego Bayesiano que puede representarse mediante un mecanismo directo de incentivos compatibles.*

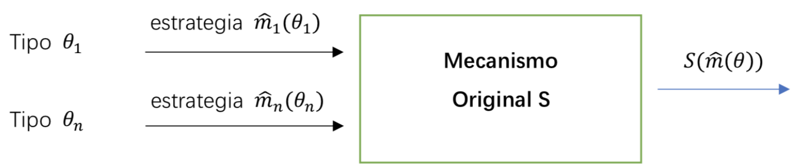
Demostración. Sea (Θ, ρ, M, S, u) un mecanismo y $\hat{m} = \{\hat{m}_1, ...\hat{m}_n\}$ un equilibrio Bayesiano. Queremos ver que hay un mecanismo directo en el cual hay un equilibrio veraz cuyo resultado coincide con el resultado del equilibrio original, es decir, para cada $\theta \in \Theta$, entrega $S(\hat{m}(\theta))$.

Decimos que el mecanismo es directo si funciona haciendo que todos los agentes simplemente hagan una sola declaración, se puede pensar que se trata de algo escrito en una hoja de papel.

Ahora, un mecanismo directo es veraz si la estrategia de equilibrio para cada agente es cuando tiene que escribir algo en ese papel para anotar toda su información privada. Entonces, simplemente para declarar cuál es su tipo. Entonces, un mecanismo veraz da a los agentes el perfil de estratégico más fácil que pueden tener. Escríbeme algo en la hoja de papel, y los agentes dicen, está bien, te contaré todos mis secretos. Te revelaré todo en un pedazo de papel, y te vas a tomar una decisión basada en eso.

El Principio de Revelación nos dice, es que si puedo implementar una función de elección social de cualquier manera complicada, también puedo implementarla de esta manera muy simple y verdadera.

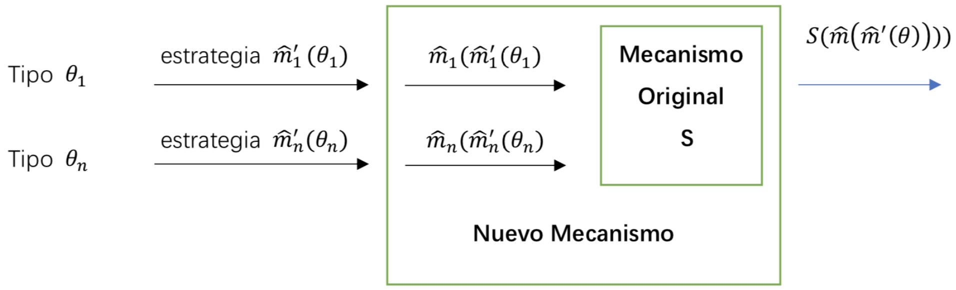
Consideramos el equilibrio Bayesiano de Nash $\hat{m} = \{\hat{m}_1, ...\hat{m}_n\}$ en el juego Bayesiano $BG = (\Theta, \rho, A, u)$. Vamos a construir un mecanismo directo adecuado que sea un juego Bayesiano de decir la verdad que representa $\hat{m}$. Por la definición, el mecanismo directo adecuado es un juego Bayesiano con los mismos espacio de tipos y de conjeturas que BG, pero con nuevos espacios de acciones y nuevas funciones de ganancias.



Los nuevos espacios de acciones son simples. Las acciones factibles del jugador i en el mecanismo directo son declaraciones (quizá falsas) sobre sus posibles tipos. Es decir, el espacio de acciones del jugador i es Θ_i. Las nuevas funciones de ganancias dependen no sólo del juego original BG, sino también del equilibrio original de dicho juego $\hat{m}$. La idea crucial es utilizar el hecho de que $\hat{m}$ es un equilibrio en BG para garantizar que decir la verdad es un equilibrio del mecanismo directo, como vemos a continuación.

Decir que $\hat{m}$ es un equilibrio Bayesiano de Nash de BG, significa que para cada jugador i, $\hat{m}_i$ es la mejor respuesta de i a las estrategias $\hat{m}_{-i}$ de los demás jugadores. Más concretamente, para cada uno de los tipos $\theta_i \in \Theta_i$ de i, $\hat{m}_i(\theta_i)$ es la mejor acción de A_i que puede elegir i, dado que las estrategias de los otros jugadores son $\hat{m}_{-i}$. Por tanto, si el tipo de i es θ_i, y permitimos a i elegir una acción de un subgrupo A_i que incluye $\hat{m}_i(\theta_i)$ entonces la elección óptima de i sigue siendo $\hat{m}_i(\theta_i)$, suponiendo de nuevo que las estrategias de los otros jugadores son $\hat{m}_{-i}$. Las funciones de ganancias en el mecanismo directo se eligen para confrontar a cada jugador con una elección exactamente de este clase.

Definimos las ganancias en el mecanismo directo sustituyendo las declaraciones de tipos de los jugadores en el nuevo juego $\hat{m}'(\theta) = (\hat{m}'_1(\theta_1), ..., \hat{m}'_n(\theta_n))$ en las estrategias de equilibrio del juego original, $\hat{m}$, y luego sustituyendo las acciones resultantes en el juego original $\hat{m}(\theta) = (\hat{m}_1(\theta_1), ..., \hat{m}_n(\theta_n))$ en la funciones de ganancias del juego original, y obtenemos:



Queremos ver que este nuevo mecanismo es veraz. Podemos ver que es directo debido a su construcción. Queremos ver que es veraz y esto debería ser fácil de ver. Es veraz exactamente por el mismo argumento de que $\hat{m}$ es un equilibrio. Entonces, si este mecanismo no es veraz, eso significaría que $\hat{m}$ no es un equilibrio. ¿Por qué? Porque si este mecanismo no es veraz, entonces quiero declarar algún tipo aquí que no sea mi tipo real. Y si estoy declarando el mecanismo de tipo, mi tipo real, eso significa que estoy cambiando la estrategia que habría jugado en el mecanismo original. De alguna manera, hubiera preferido también, si miento al mecanismo aquí, hubiera preferido mentirme a mí mismo en el mecanismo original, de modo que efectivamente estaría jugando una estrategia diferente a la que estaba jugando antes. Y, por supuesto, la idea de un equilibrio es que nadie puede ganar cambiando su estrategia. Entonces, si no hubiera querido mentirme a mí mismo en el mecanismo original y cambiar mi estrategia, tampoco quería mentirle al mecanismo ahora porque ya está jugando una estrategia para mí que es un equilibrio para el mecanismo original. Y, por supuesto, siendo ese el caso, elijo los mismos resultados que el mecanismo original.

$\square$

6. Conclusiones

A raíz de las ideas de John Harsanyi, un juego Bayesiano puede modelizar a través la introducción de la naturaleza como un jugador en un juego. Harsanyi propone un enfoque para modelizar un juego Bayesiano de tal manera que permite que los juegos de información incompleta se conviertan en juegos de información imperfecta.

Después, de haber presentado una breve introducción a la teoría de subastas siguiendo el enfoque de Harsanyi, las subastas del sobre cerrado al primer precio y al segundo precio se pueden modelar como juegos Bayesianos. Y después descubrimos las estrategias óptimas, que son equilibrios Bayesianos para los postores en subastas de sobre cerrado en diferentes situaciones.

En la subasta al primer precio, el postor que se adjudica el objeto paga su puja. Si se tienen dos postores con la valoración distribuida de manera uniforme, la estrategia óptima de cada postor es pujar con la mitad de su valoración del objeto, es decir, con el equilibrio Bayesiano: (estrategia de J1=valoración de J1/2, estrategia de J2=valoración de J2/2), cada jugador puede obtener una ganancia esperada máxima. Si tienen n postores y las valoraciones están distribuidas de manera general, entonces, el único equilibrio Bayesiano del postor i es $\hat{a}^I(\theta_i) = E[Z|Z < \theta_i], \forall i = 1, ..., n$ donde Z es la variable aleatoria máxima del resto de jugadores. En el caso particular en que la valoración tiene distribución uniforme, el equilibrio Bayesiano es $(n-1)v_i/n$, donde v_i es la valoración del objeto de jugador i. Los resultados a priori se basan en la neutralidad al riesgo. Si dos postores son aversos al riesgo (tienen miedo de tener riesgo cuando están frente a una toma de decisiones) y distribución uniforme, la estrategia óptima de cada postor es pujar por el objeto con dos tercios de su valoración del objeto.

En la subasta al segundo precio, el postor gana el objeto con la puja más alta y paga la segunda puja más alta. Mediante dos teoremas que hemos visto, concluimos que existe un único equilibrio Bayesiano que determina que la mejor puja es la que coincide con su valoración del objeto. La estrategia de cada postor en dicho equilibrio Bayesiano es débilmente dominante.

Después, a través la demostración del Teorema Principio de Equivalencia de ingresos, consideramos que el valor esperado del pago de cada jugador que se realiza en el equilibrio Bayesiano de las subastas a priori (excepto en el caso de aversión al riesgo) es el mismo. Esto implica que el vendedor obtiene el mismo ingreso esperado, independientemente de las reglas de la subasta.

En la última sección, se ha explicado el ejemplo del director que diseña un modelo de mecanismo para poder conocer información real de los candidatos que quiere contratar con el objetivo de seleccionar el candidato con mayor potencial de productividad para maximizar su rentabilidad.

En conclusión, mediante los análisis realizados, hemos podido concluir que los juegos con información incompleta se corresponden con el concepto de equilibrio Bayesiano.

Referencias

[1] E Cerdá, L Jimeno, J Pérez, (2013) "Teoría de juegos" P.307-335

[2] Jackson,Leyton-Brown, Shoham, Game Theory II: Advanced Applications, Capítulo: Revelation Principle, University of Stanford

https://es.coursera.org/lecture/game-theory-2/2-4-revelation-principle-CIWtP

[3] John C. Harsanyi, (1994) "Games with incomplete information " P.1-2 Haas School of Business, University of California, Berkeley, USA

https://pdfs.semanticscholar.org/2579/4874ee980839d0a82d365b1316989bd188c8.pdf

[4] Joan E. Ricart, (1988) "Juegos con información incompleta" Documento de Investigación DI-139, P.1, 7-10

https://www.unc.edu/ normanp/711part11.pdf

[5] Julio González-Díaz, Ignacio García-Jurado, M. Gloria Fiestras-Janeiro, (2010) "An Introductory Course on Mathematical Game Theory" Vol.115 P.18, 72-75, 163-171, 178-189

[6] R Gibbons - Antoni Bosch Editor, (1992) "Un primer curso de teoría de juegos" P.164-170